都立高校入試　数学から

埼玉県で、模擬テストの結果を優先する、無茶ぶりの進路指導の結果を見てきた、私には、出題傾向の決まっている都立高校の数学は、、無理な競争を作らない良い制度に見える。

大問で５題が決まっている。

定番問題と言われる第一問では、「分数計算・文字式の整理・平方根のハート計算・一次方程式・連立方程式・二次方程式・確率 or 統計・図形の角度問題・最後に作図」と出題傾向が決まっているので、必要な知識も限られている。

第二問は「みんなで考えた」から始まる思考問題。文章で与えられた条件を文字式に変形、最終的に数値を代入して答えを求めたり、証明する問題で、こうすれば必ず解けると言う問題では無いので、「最後に解け」と教えている。

第三問は、関数問題で、直線又は原点頂点の二次関数と、その交点に関する問題で、後に紹介する、直線と放物線の２交点と頂点の造る三角形の面積を求める、等積変形が重要になる。関数は座標を使うので、随所に平行線が現れ、必然的に相似な三角形が生まれるので、「面積比・長さを求める」と言う出題が難問。

第四問は、平面図形で、合同や相似の証明、長さや比を求める出題だが、ヒントは隠されるので、二等辺三角形・角の二等分線の性質を使って出された「隠しヒント」を見抜けば、容易に解ける狙い目の問題だ。

第五問は、空間図形として立体を扱う問題だが、ここで重要なのは、三角錐・四角錐・円錐など、錐の性質を良く知っておけば容易に解ける問題だ。特に三角錐は、別名「四角錐」と呼ばれ、他のもそうだが、体積を「底面積×高さ÷3」で出す習慣が大切。

四面体と考えると４つの頂点が有り、それに対する４つの底面が有るので、一見、複雑な平方根を使って出せそうな、ある頂点から下ろした垂線の足（高さ）を求めるには、ヒントから容易な方法で体積を出し、求める頂点に対する底面積を計算し

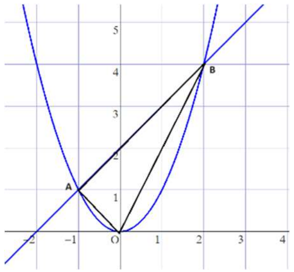
高さ＝体積×3÷底面積　で求めるのが急所だ。

この中で、二度出題される考え方『視点を変えて、見方を考える方法』が、大学受験に出題されると超難問になるので、解説しておこう。

その一つが、等積変形で求めようとする、

放物線の２交点と頂点の作る三角形の面積だ。

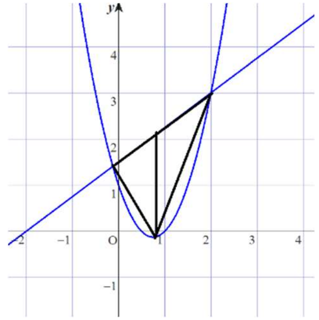
面積と言えば「底辺×高さ÷2」と言うのが定着し、それしか浮かんでこないから、難問が現れる。



このグラフは放物線 Y＝X^2　と直線 Y＝X＋2 の

２交点 A、B と頂点 O の作る△OAB の面積を

求める問題だ。この図は、説明のために、教科書並みに、見た目で数値の判る図に成っている。しかし、同じ題意で解ける、大学受験用の、この右の図ではどうだろう



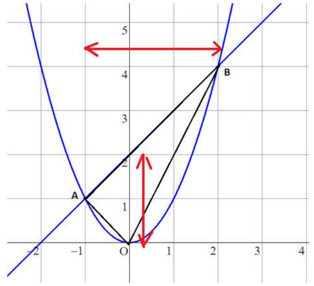
ＡＢ、ＯＡ、ＯＢのいずれも底辺として使うには長さ計算が大変であろう。

そこが、入試問題の罠である。

ゴリゴリ計算すれば、必ず解けるのだ。しかし、そうやって、時間を掛ければ「**勝負に負ける**」のが入試の宿命だ。

だから、「入試は時短」早い者勝ちなのである。

解説を続けよう。等積変形を教える、次の補助線を見てもらおう。



A 点を高さ 2 まで平行移動し A‘に

B 点も高さ 2 まで平行移動し B‘に変形すると

△OA‘B’は、底辺 A‘B’＝3、高さ 2 の三角形に変身するので　面積＝3×2÷2＝3　と

採点官に都合の良い答えになる。

私はこれを、面積＝X 増分×Y 増分÷2　　　と

直角な２方向の成分で考えろと提案したい。

難解例として提案した図は、放物線 $Y=2X^2-3X+1$ と直線 $3X-4Y+6=0$ の作る三角形の面積を求める問題である。

頂点における Y の増分と、2 交点の幅 AB が判れば答えが出る。

AB の幅と言えば、$\beta-\alpha$だが、新 6 分の 1 公式で使った様に、これは$\frac{\sqrt{D}}{A}$ の事だから

2 式を使って解の公式の形を作ればよいと判る。

直線の式を 4Y＝の形に変形すると　$4Y=3X+6$ だから

$4Y=8X^2-12X+4=3X+6 \quad \Rightarrow \quad 8X^2-15X-2=0$

$B^2=225$、$-4AC=+64$、$D=289$

X 増分$=\frac{\sqrt{289}}{8}$　　　解まで求める必要は無い

Y 増分を求めるには P、Q 計算　$P=\frac{-b}{2a}=\frac{3}{4}$　$Q=Y_{(P)}=2\times\frac{9}{16}-\frac{9}{4}+1=-\frac{1}{8}$

直線の、頂点上空の Y 座標　$4Y=3\times\frac{3}{4}+6=\frac{33}{4}$

よって Y 増分$=\frac{33}{4}-\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{66+1}{8}=\frac{67}{8}$

さあ準備は出来た　面積$=\frac{\sqrt{289}}{8}\times\frac{67}{8}\div 2=\frac{67\sqrt{289}}{128}$

とゴリゴリ計算したら、気が遠くなるような答えだ。でも、2～3 分で出る。

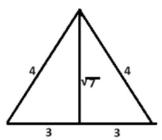
空間図形問題は、二次元画像のヒントで三次元の問題を解くのであるから、提供されたヒント図のまま考えても、絶対に解けないから、**解答に通じる断面図**を自作する必要が有る。ヒントは生では与えられないが、立体問題で隠される「隠しヒント」の多くは、「二等辺三角形」と「重心」である。

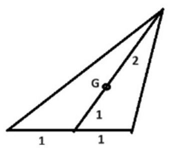
二等辺三角形のヒントは AB＝AC＝4、BC＝6 などと与えられれば

△ABC は A を頂点とする 2 等辺三角形で底辺 BC の中点と頂点 A を結べば、必ず直角三角形が出来るので、高さがすぐに判明し、面積も出せる。ヘロンの公式を使うまでもない。高さも必ず使うので、この例では高さ＝$\sqrt{7}$、面積＝$3\sqrt{7}$ である。

三平方を使うために求めた底辺の半分に高さを掛ければ面積である。

また、重心は、作図だけと思いがちだが、中線を 2：1 に内分した点である事が重要だ。中線とは、底辺の二等分点と頂点を結んだ線であるから、二等辺三角形を、底辺の中点で二等分するのと似ていて、非常に重要である。





また、「2 点間の最短距離」と言うキーワードは

表面を表す「展開図」の上で、直線を見つけるのが重要だが

空間図形問題が苦手な人は、これら二次元に直すと言う概念が難しいらしい。

これらを、身に着けるには、練習しかないのだが

教訓：　問題を解くヒントは必ず与えられている

しかし、

直ぐには解けないように「隠しヒント」で出されたヒントに気付く事が重要

特に図形問題のヒント図は、そのままは使えないので、出題者が安心して出していると知ろう。その証拠に、数値は「自分で書き込む」

数値が書き込まれたヒント図の問題は、相当やばい難問のはずである